Prednáška 8

8.1. Merateľné a jednoduché funkcie

Tak ako nevieme merať všetky množiny v $\mathbb{R}$, nebudeme vedieť ani integrovať všetky funkcie. Riemannov integrál nezávisel na hodnotách integrvanej funkcie v konečnom počte bodov. V prípade Lebesgueovho integrálu budú mať takúto vlastnosť množiny nulovej miery. Preto stačí, aby funkcia bola definovaná skoro všade na M.

Definícia 8.1.1.

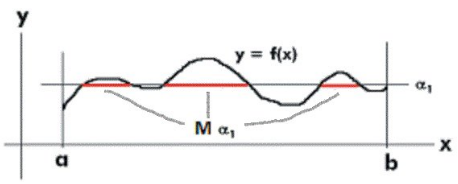
Povieme, že funkcie f a g sú ekvivalentné na množine $M \subset \mathbb{R}^m$, ak

- sú definované s.v. na M
- $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ s.v. na M

Definícia 8.1.2.

Nech $M \in \mathcal{M}_n$, povieme, že funkcia f je merateľná (lebesgueovsky) na M, ak

1. je definovaná s.v. na M
2. pre každé $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ je množina $M_{\alpha_1}(f) = \left\{\mathbf{x} : \mathbf{x} \in D_f \cap M, f(\mathbf{x}) > \alpha_1\right\}$ merateľná ($M_{\alpha_1}(f) \in \mathcal{M}_n$)



Inak povedané, potrebujeme aby pre každú otvorenú množinu $U \subset \mathbb{R}$ bola množina $f^{-1}(U) \in \mathcal{M}_n$ (merateľná). V nasledujúcej vete máme veľmi dôležitú vlastnosť. Je známe, že postupnosť spojitých funkcií nemusí konvergovať (bodovo) k spojitej funckii, a podobne ani postupnosť riemannovsky inegrovateľných funkcií nemusí konvergovať k riemannovsky inegrovateľnej funkcii. U merateľných funkcií to však platí.

Veta 8.1.3 (Vlastnosti merateľných funkcií)**.**

1. Ak sú f, g ekvivalentné na $M \in \mathcal{M}_n$, potom sú buď oba merateľné alebo oba nemerateľné.
2. Ak je f merateľná na $M \in \mathcal{M}_n$, potom je merateľná na každej merateľnej množine $P \subset M$.
3. Ak je f merateľná na $M_i \in \mathcal{M}_n,\ i \in \mathbb{N}$, potom je merateľná na $\bigcup_{i=1}^{\infty} M_i$.
4. Ak sú f_n merateľné na $M \in \mathcal{M}_n,\ n \in \mathbb{N}$, potom sú merateľné aj $\sup_n f_n,\ \inf_n f_n$ a $\liminf_{n\to\infty} f_n,\ \limsup_{n\to\infty} f_n,\ \lim_{n\to\infty} f_n$ (pokiaľ existujú v $\mathbb{R}^*$ s.v. na M).
5. Ak sú f, g merateľné na $M \in \mathcal{M}_n$, potom sú aj $c f,\ f+g,\ f-g,\ f\cdot g$ na M merateľné, ak sú definované s.v. na M.
6. Nech je $F \in C(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ a $f_i,\ \ i = 1, \dots, m$ sú merateľné a s.v. konečné na $M \in \mathcal{M}_n$, potom je na M merateľná aj funkcia
$$\phi(\mathbf{x}) = F(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_m(\mathbf{x})).$$

Poznámka 8.1.4.

Existujú nemerateľné funkcie. Napríklad funkcia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in P, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus P, \end{cases}$$

kde $P \subset [0,1]$ je nemerateľná, nie je merateľná na $[0,1] \in \mathcal{M}_1$.

V podstate skoro všetky funkcie, s ktorými sa stretneme, budú merateľné.

Veta 8.1.5.

Ak je f spojitá na $M \in \mathcal{M}_n$, potom je na M merateľná.

Dôsledok 8.1.6.

Ak je f spojitá na $M \setminus P$, $M \in \mathcal{M}_n$ a $\lambda_n(P) = 0$, potom je na M merateľná.

čiastočne platí aj obrátene tvrdenie známe ako Luzinova veta, ktoré však presahuje obsah tohto kurzu. ďalej budeme potrebovať pojmy kladnej a zápornej časti funkcie. Teda

$$f^+(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \max\{f(\mathbf{x}), 0\}, \quad f^-(\mathbf{x}) \overset{\text{def}}{=} \max\{-f(\mathbf{x}), 0\}, \ \mathbf{x} \in D_f.$$

Poznámka 8.1.7.

Zrejme platí $f = f^+ - f^-$, $|f| = f^+ + f^-$. Podľa vety 8.1.3 je f merateľná na M práve vtedy, keď sú merateľné na M obe funkcie f^+, f^-.

Problém 8.1.8.

Ak je f merateľná na M, je tam merateľná aj $|f|$. Platí to aj naopak?

Teraz zavedieme pojem jednoduchej funkcie, pre ktorú bude definícia integrálu jasná. Ukážeme ďalej, ako je možné ľubovoľnú funkciu aproximovať takýmito funkciami.

Definícia 8.1.9.

Funkciu $s : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ nazveme jednoduchou, ak $D_s = \mathbb{R}^m$ a H_s je konečná množina.

Zrejme funkcia s je jednoduchá vtedy a len vtedy, ak existujú $M_i \subset \mathbb{R}^m$ a $c_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, n$, tak, že

$$s = \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_{M_i}.$$

Príklad 8.1.10.

Príkladom jednoduchej funkcie je charakteristická funkcia množiny $M \subset \mathbb{R}^m$:

$$\chi_M(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \mathbf{x} \in M, \\ 0, & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus M. \end{cases}$$

Poznámka 8.1.11.

Každú jednoduchú funkciu môžeme zapísať v kanonickom zápise, ktorý spĺňuje podmienky $c_i \neq c_j$, $M_i \cap M_j = \emptyset$, $i \neq j, M_i \neq \emptyset$ a

$$\bigcup_{i=1}^{n} M_i = \mathbb{R}^m.$$

Jednoduchá funkcia je merateľná na $\mathbb{R}^m$ práve vtedy a len vtedy, ak sú všetky množiny M_i v jej kanonickom zápise merateľné.

Veta 8.1.12.

Nech funkcia f je merateľná na $M \subset \mathbb{R}^m$. Potom existuje postupnosť jednoduchých merateľných funkcií $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ tak, že

$$\lim_{n\to\infty} s_n = f \;\text{ s.v. na } M \; (s_n(\mathbf{x}) = 0, x \notin M).$$

Ak je naviac f nezáporná, je možné zvoliť $s_n(\mathbf{x})$ tak, že $s_n \geq 0$ a $s_n(\mathbf{x}) \leq s_{n+1}(\mathbf{x})$, $n \in \mathbb{N}$, s.v. na M.

8.2. Lebesgueov integrál

Definícia 8.2.1.

Nech s je jednoduchá nezáporná merateľná funkcia na $\mathbb{R}^n$ a $M \in \mathcal{M}_n$. Potom definujeme

$$\int_M s \,\mathrm{d}\lambda_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{n} c_i \,\lambda_n(M \cap M_i),$$

kde $s = \sum_{i=1}^{n} c_i \,\chi_{M_i}$ je kanonický zápis.

V sume berieme do úvahy konvenciu $0 \cdot \infty = 0$, lebo to vyjadruje prirodzenú požiadavku, že integrál cez M z funkcie identicky nulovej na M je rovný 0 aj keď je $\lambda_n(M) = \infty$.

Poznámka 8.2.2.

Zrejme z definície plynie nezápornosť integrálu, $\int_M s \,\mathrm{d}\lambda_n = 0 \Leftrightarrow s = 0$ s.v. na M. Integrál cez množinu nulovej miery je rovný nule pre ľubovoľnú jednoduchú nezápornú merateľnú funkciu. ďalej

$$\int_M 1 \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_{\mathbb{R}^m} \chi_M \,\mathrm{d}\lambda_n = \lambda_n(M).$$

Navyše

$$\int_M s \,\mathrm{d}\lambda_n = \infty \Leftrightarrow s > 0$$

na množine $P \subset M$ s $\lambda_n(P) = \infty$.

Lema 8.2.3 (Vlastnosti integrálu pre j.n.m. funkcie)**.**

Nech $M, P \in \mathcal{M}_n,\ P \subset M,\ s_1, s_2, s$ sú jednoduché nezáporné merateľné funkcie. Potom

(a) $s_1 \leq s_2$ s.v. na M $\Rightarrow \int_M s_1 \,\mathrm{d}\lambda_n \leq \int_M s_2 \,\mathrm{d}\lambda_n$

(b) $\int_M (s_1 + s_2) \,\mathrm{d}\lambda_n = \int_M s_1 \,\mathrm{d}\lambda_n + \int_M s_2 \,\mathrm{d}\lambda_n$

(c) $\int_M c\, s \,\mathrm{d}\lambda_n = c \int_M s \,\mathrm{d}\lambda_n$ pre $c > 0$

(d) $\int_P s \,\mathrm{d}\lambda_n \leq \int_M s \,\mathrm{d}\lambda_n$

Lema 8.2.4 (Levi)**.**

Nech $M \in \mathcal{M}_n$ a s_n je neklesajúca postupnosť j.n.m. funkcií pre s.v. $x \in M$. Potom platí

$$\int_M \lim_{n\to\infty} s_n \,\mathrm{d}\lambda_n = \lim_{n\to\infty} \int_M s_n \,\mathrm{d}\lambda_n.$$